

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 21 febbraio 1909.*

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulle equazioni integro-differenziali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Nello studio generale di varie classi di problemi d'isteresi, che si può affrontare partendo dai concetti di *funzioni dipendenti da altre funzioni* <sup>(1)</sup>, si è condotti ad equazioni che hanno un tipo misto, cioè in parte quello delle equazioni differenziali a derivate parziali ed in parte quello delle equazioni integrali. Mi permetto perciò di chiamarle *equazioni integro-differenziali*. La natura dei problemi d'isteresi porta ad equazioni ricollegantesi con equazioni integrali con limiti variabili, ma l'analisi stessa potrebbe anche essere estesa ad altri casi.

In questa Nota non mi occuperò che di una equazione integro-differenziale che può assumersi come il tipo delle equazioni stesse nel caso ellittico e la cui trattazione insegna la via da seguire in altri casi più complessi, come appunto le ricerche sulla equazione di Laplace insegnarono ad integrare le equazioni di tipo ellittico più complicato. Mi riservo in lavori successivi di trattare casi di equazioni integro-differenziali di tipo iperbolico e parabolico, e quelli in cui una stessa variabile comparisce come variabile di derivazione e fra le variabili d'integrazione.

<sup>(1)</sup> Rend. Acc. dei Lincei, vol. 3°, 1887.

2. L'equazione che considererò sarà la seguente:

$$(I) \quad \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} + \\ + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0$$

che si potrà anche scrivere per semplicità:

$$(I) \quad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0$$

in cui  $u$  denota una funzione monodroma finita e continua ed avente le derivate prime e seconde rispetto ad  $x, y, z$  monodrome finite e continue in un campo  $S$  a tre dimensioni i cui punti hanno le coordinate  $x, y, z$  e per tutti i valori di  $t$  compresi fra 0 e  $T > 0$ , mentre  $f(t, \tau)$ ,  $\varphi(t, \tau)$ ,  $\psi(t, \tau)$  sono funzioni finite e continue delle variabili  $t, \tau$  per valori compresi fra 0 e  $T$ .

3. Cominciamo dal dimostrare che, se al contorno  $\sigma$  di  $S$ ,  $u$  è nota per tutti i valori di  $t$  compresi fra 0 e  $T$ , la  $u$  è nota, entro  $S$ , per tutti i valori di  $t$ , compresi fra gli stessi limiti.

Infatti se  $u$  è nulla lungo  $\sigma$  per i valori di  $t$  compresi fra 0 e  $T$ , dalla (I) segue

$$(II) \quad \int_S \Delta u(t) dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \right\} dS = 0$$

ove

$$\Delta u(t) = \left( \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \right)^2.$$

Sia  $M$  una quantità maggiore del limite superiore di

$$\int_S \Delta u(t) dS$$

per tutti i valori di  $t$  compresi fra 0 e T; poichè

$$\int_S \left( \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

avremo evidentemente

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| dS < M$$

ed in modo analogo

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \right| dS < M, \quad \int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \right| dS < M.$$

Quindi se  $|f(t, \tau)| < \frac{N}{3}$  e così pure  $|\varphi(t, \tau)| < \frac{N}{3}$ ,  $|\psi(t, \tau)| < \frac{N}{3}$ , in virtù della (II) sarà

$$(1) \quad \int_S \mathcal{A}u(t) dS < MNt$$

e per conseguenza

$$(1') \quad \int_S \mathcal{A}u(\tau) dS < MN\tau.$$

Ma

$$\int_S \left( \sqrt{\tau} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - \sqrt{t} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

in cui  $\xi$  rappresenta una qualunque delle tre variabili  $x, y, z$ . Perciò a cagione delle (1) e (1') segue

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| dS < MN t^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}$$

onde, tenendo presente la (II), risulta

$$\int_S \mathcal{A}u(t) dS < \frac{2}{3} MN^2 t^2.$$

Così procedendo ed osservando in generale che

$$\int_S \left( t^{\frac{n}{2}} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - \tau^{\frac{n}{2}} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0$$



si trova facilmente che

$$\int_S \mathcal{A}u(t) dS < \frac{M(2Nt)^{n-1}}{n!}$$

qualunque sia il numero intero  $n$ . Ne segue che  $u(x, y, z, t)$  è sempre nulla. Da questa proprietà discende immediatamente il teorema enunciato al principio di questo §.

4. Chiameremo *equazione aggiunta* della (I) l'equazione

$$(I') \quad \mathcal{A}^2 v(t) + \int_t^{\theta} \left( \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right) d\tau = 0$$

in cui  $\theta$  è compresa fra  $t$  e  $T$ .

Poniamo

$$H_{\sigma} = \int_0^{\theta} dt \int_{\sigma} \left( v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma + \\ + \int_0^{\theta} dt \int_t^{\theta} d\tau \int_{\sigma} \left\{ \left( v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos nx + \right. \\ + \left( v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right) \varphi(\tau, t) \cos ny + \\ \left. + \left( v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial z} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma$$

ove  $n$  denota la normale al contorno  $\sigma$  diretta verso l'esterno dello spazio  $S$ .

La  $H_{\sigma}$  dipenderà dalle due funzioni  $u$  e  $v$  e sarà una funzione nel senso ordinario della variabile  $\theta$ . Per mettere in evidenza questo scriveremo

$$H_{\sigma}([u, v], \theta).$$

Dalle equazioni (I) e (I') segue facilmente la relazione

$$(III) \quad H_{\sigma}([u, v], \theta) = 0$$

che corrisponde al lemma di Green e vale se, anche  $v$  e le sue derivate prime e seconde rispetto a  $x, y, z$ , sono monodrome finite e continue.

Chiamando  $H'_{\sigma}([u, v], \theta)$  il primo termine di  $H'_{\sigma}$  cioè

$$\int_0^{\theta} dt \int_{\sigma} \left( v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma$$

e chiamando  $H''_\sigma([u, v], \theta)$  la parte residua avremo evidentemente

$$H_\sigma([u, v], \theta) = H'_\sigma([u, v], \theta) + H''_\sigma([u, v], \theta).$$

5. È ora possibile costruire una soluzione della equazione aggiunta (I') la quale in un punto (che può supporre essere l'origine) diviene infinita dello stesso ordine della inversa della distanza da questo punto.

Poniamo

$$f(t, \tau) = F_{1,0,0}(t, \tau), \quad g(t, \tau) = F_{0,1,0}(t, \tau), \quad \psi(t, \tau) = F_{0,0,1}(t, \tau)$$

$$F_{h,k,l}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \sum_{i+j+g=\varrho} F_{h-i,k-j,l-g}(t, \xi) F_{i,j,g}(\xi, \tau) d\xi$$

in cui la somma  $\sum_{i+j+g=\varrho}$  si intende estesa a tutti i valori interi di  $i, j, g$  la cui somma è costante ed uguale a  $\varrho$ , mentre si suppone che una  $F$  con indici negativi sia nulla. Si vede facilmente che, se  $1 \leq \varrho < h+k+l$ ,  $F_{h,k,l}$  è indipendente da  $\varrho$ .

Pongasi inoltre

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) &= \\ &= \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n}} \sum_{h+k+l=n} F_{h,k,l}(\tau, t) \sum_0^h \alpha \sum_0^k \beta \sum_0^l \gamma (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \times \\ &\times \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \frac{(2h)!(2k)!(2l)! \left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!(2\beta)!(2\gamma)!(h-\alpha)!(k-\beta)!(l-\gamma)!} \end{aligned}$$

supponendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

La serie precedente è uniformemente convergente, derivabile rispetto a  $x, y, z$ ; e la funzione

$$(2) \quad V(x, y, z | t, \theta) = \frac{1}{r} \left( 1 + \int_t^\theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) d\tau \right)$$

sarà la funzione cercata, come può direttamente verificarsi.

6. Se l'origine è esterna al campo  $S$  si potrà applicare la (III) sostituendo  $V$  a  $v$ , altrimenti se l'origine è interna, bisogna escludere l'origine stessa con un contorno e chiamandolo  $\omega$ , la (III) si scriverà

$$(III') \quad H_\sigma([u, V], \theta) + H_\omega([u, V], \theta) = 0.$$



Preso il contorno  $\omega$  sferico con raggio evanescente avremo al limite

$$\lim H'_\omega([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^\theta u_0(t) \left[ 1 + \int_t^\theta S(\tau, t) d\tau \right] dt$$

$$\lim H''_\omega([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^\theta u_0(t) dt \int_t^\theta T(\tau, t) d\tau,$$

avendo posto per semplicità

$$u_0(t) = u(0, 0, 0, t).$$

Ora

$$S(\tau, t) = -T(\tau, t) = \sum_{l=1}^{\infty} n \frac{n!}{(2n)!} (-1)^n \sum_{h+k+l=n} \frac{(2h)!(2k)!(2l)!}{h!k!l!} F_{h,k,l}(\tau, t)$$

quindi

$$(3) \quad \lim H_\omega([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^\theta u_0(t) dt.$$

Si può ottenere questo risultato anche in altro modo ricorrendo alla seguente formula, di cui tralascio la dimostrazione

$$\begin{aligned} \int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma + \int_t^\theta d\tau \int_\sigma \left( \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \right. \\ \left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) d\sigma = -4\pi. \end{aligned}$$

Dalle (III') e (3) si deduce

$$(A) \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} H_\sigma([u, V], \theta).$$

7. Se  $w$  è una soluzione della (I'), regolare entro  $S$ , sarà, per la (III)

$$H_\sigma([u, w], \theta) = 0$$

quindi

$$(A') \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} H_\sigma([u, V + w], \theta)$$

e se  $V + w$  sarà nulla lungo  $\sigma$ , nel secondo membro della equazione (A') compariranno i soli valori di  $u(t)$  lungo  $\sigma$  per i valori di  $t$  compresi fra 0 e  $\theta$ , onde la (A') risolverà il problema di *determinare  $u_0(\theta)$  quando si conosce  $u(t)$  lungo  $\sigma$  per  $t$  compreso fra 0 e  $\theta$ .*

Nel caso, per esempio, in cui  $\sigma$  fosse un piano,  $w$  si otterrebbe immediatamente col metodo delle immagini.

La formula (A) corrisponde invece al *teorema di Green*, giacchè esprime  $u_0(\theta)$  per mezzo dei valori di  $u(t)$  e delle sue derivate prime lungo  $\sigma$  per  $t$  compreso fra 0 e  $\theta$ .

8. Se, anzichè avere la (I), si avesse l'equazione

$$(I_a) \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} g(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = \chi(x, y, z, t)$$

poniamo

$$\int_0^\theta dt \int_S v(t) \chi(x, y, z, t) dS = K([\chi, v], \theta)$$

allora le (A) e (A') dovrebbero essere rispettivamente sostituite dalle

$$(B) \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ H_\sigma([u, V], \theta) - K([\chi, V], \theta) \}$$

$$(B') \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ H_\sigma([u, V + w], \theta) - K([\chi, V + w], \theta) \}.$$

Sarebbe facile ricavare da queste formule un teorema analogo a quello del Poisson.

9. Prima di chiudere questa Nota mi permetto di aggiungere alcune osservazioni.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali simultanee

$$\Delta^2 u_1 = 0$$

$$a_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \Delta^2 u_2 = 0$$

$$a_{31} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{31} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{32} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{32} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{32} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \Delta^2 u_3 = 0$$

.....

L'equazione (I) può considerarsi come il caso limite del sistema precedente quando il numero delle incognite e delle equazioni cresce indefinitamente <sup>(1)</sup>.

Il sistema aggiunto del precedente sarà

$$\Delta^2 v_1 + a_{21} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} +$$

$$+ a_{31} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{31} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \dots = 0$$

$$\Delta^2 v_2 + a_{32} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{32} \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{32} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \dots = 0$$

.....

e la soluzione fondamentale è facile a calcolarsi ed al limite conduce alla (2).

<sup>(1)</sup> Cfr. la prima mia Memoria: *Sulla inversione degli integrali definiti*, § 3, Atti della R. Accademia di Torino, 1896.



10. Poniamo

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau) f(t, \tau) d\tau = U(x, y, z, t)$$

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau) \varphi(t, \tau) d\tau = V(x, y, z, t)$$

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau) \psi(t, \tau) d\tau = W(x, y, z, t).$$

Invertendo, con i metodi che detti per la risoluzione delle equazioni integrali, le formule precedenti, si ha

$$\begin{aligned} (4) \quad u(x, y, z, t) &= U(x, y, z, t) + \int_0^t U(x, y, z, \tau) f'(t, \tau) d\tau \\ &= V(x, y, z, t) + \int_0^t V(x, y, z, \tau) \varphi'(t, \tau) d\tau \\ &= W(x, y, z, t) + \int_0^t W(x, y, z, \tau) \psi'(t, \tau) d\tau \end{aligned}$$

mentre la (I) si potrà scrivere

$$(5) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

quindi la (I) può ricondursi ad *un sistema simultaneo di due equazioni integrali (4) e della equazione differenziale (5) colle tre incognite U, V, W.*

È bene a questo proposito osservare che le equazioni stesse in generale non possono separarsi, e che *il problema della risoluzione delle equazioni integro-differenziali costituisce in generale un problema essenzialmente distinto dai problemi delle equazioni differenziali e da quelli ordinarii delle equazioni integrali.*



**Matematica.** — *Sopra un caso limite delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Nella teoria delle trasformazioni  $B_k$  per le superficie applicabili sulle quadriche generali, da me recentemente costruita <sup>(1)</sup>, si presenta un caso limite notevole quando la quadrica fondamentale rigata  $Q$ , variando nel sistema confocale, diventa una delle quadriche singolari della schiera, degenerando come inviluppo in una delle coniche focali, le cui tangenti vengono allora a rappresentare i due sistemi (coincidenti) di generatrici. Si ottiene così, come caso limite, una teoria delle trasformazioni per una classe particolare di curve che possono dirsi *coniche distorte*, come quelle curve che si ottengono dalle coniche ordinarie assoggettandole ad una torsione arbitraria senza alterare, in ciascun punto, il valore della flessione. In particolare se la conica fondamentale è un circolo, le curve deformate sono le curve a flessione costante o i *circoli storti* (Cesàro).

Per maggiore chiarezza degli enunciati, dei teoremi e delle formole che andiamo ora ad esporre, premettiamo le osservazioni seguenti. Quando una sviluppabile si deforma conservando rettilinee le sue generatrici, il suo spigolo di regresso si deforma conservando in ogni punto invariata la flessione e cangiando la torsione. Viceversa se due curve  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  si corrispondono punto per punto, per eguaglianza d'archi ed avendo in punti corrispondenti eguale flessione, le sviluppabili delle loro tangenti sono applicabili corrispondendosi le generatrici. Diremo perciò che le due curve  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  sono *applicabili*, ovvero che l'una è una deformata dell'altra. Teniamo fissa una delle due curve, p. e.  $\Gamma'$ , e assoggettiamo l'altra ad un movimento continuo nello spazio per modo che ogni suo punto si porti successivamente a coincidere col corrispondente di  $\Gamma'$ , ed insieme il piano osculatore di  $\Gamma$  nel punto di contatto venga a coincidere col piano osculatore di  $\Gamma'$ ; diremo allora che  $\Gamma$  *rotola* sopra  $\Gamma'$ .

Ciò premesso, prendiamo una conica fondamentale  $C$  ed una qualunque conica distorta  $\Gamma$ , applicabile sopra  $C$ . Consideriamo inoltre una quadrica rigata  $Q$ , di cui  $C$  sia una conica focale, ed immaginiamo che la conica  $C$  rotoli sulla deformata  $\Gamma$  seco trascinando la quadrica  $Q$ . Abbiamo allora il seguente teorema fondamentale:

*Le rette (dell'uno o dell'altro sistema) della quadrica  $Q$ , trascinata*

(<sup>1</sup>) Vedi la mia Nota del 5 marzo 1907 in questi Rendiconti, ove vengono enunciati i principali teoremi di questa teoria, ora sviluppata nella mia ultima pubblicazione: *Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales* (Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences, t. XXXIV).

nel rotolamento della conica focale  $C$  sulla sua deformata  $\Gamma$ , generano una congruenza le cui sviluppabili di un sistema hanno per spigoli di regresso altrettante coniche distorte  $\Gamma'$  applicabili sulla conica  $C$ .

A complemento di questo enunciato aggiungiamo quanto segue. Si consideri la conica  $C'$ , confocale a  $C$ , sezione del piano di  $C$  colla quadrica  $Q$ . Mentre  $C$  rotola su  $\Gamma$ , la conica  $C'$  descrive una superficie modanata (moulure), che indicheremo con  $\Sigma$ , involupata lungo le coniche  $C'$ , dalle varie posizioni della quadrica  $Q$ . Su questa superficie  $\Sigma$  abbiamo un doppio sistema di curve  $\Gamma'$  che seguono, in ogni loro punto, la direzione di quella generatrice di  $Q$  che vi passa. Queste curve  $\Gamma'$  sono appunto le indicate trasformate della conica distorta iniziale  $\Gamma$ .

2. Le formole relative alle trasformazioni delle coniche distorte difficilmente potrebbero dedursi da quelle generali per le trasformazioni delle deformate delle quadriche e d'altronde la natura più elementare dell'attuale teoria, che appartiene alla teoria delle curve, domanda un'analisi diretta, che qui rapidamente indichiamo.

Considerando una deformata qualunque  $\Gamma$  della conica fondamentale  $C$ , riteniamo per questa curva  $\Gamma$  le consuete notazioni (Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale*, cap. I) e indichiamo con  $u$  un parametro che fissa la posizione di un punto mobile su  $\Gamma$ . Similmente sulla conica  $C'$ , confocale a  $C$ , prendiamo un secondo parametro  $v$  per individuare la posizione di un punto mobile su  $C'$ . Quando la conica  $C$ , rotolando sopra  $\Gamma$ , viene con essa a contatto in un punto  $P = (x, y, z)$ , corrispondente al valore  $u$  del parametro, le coordinate  $x', y', z'$  di un punto qualunque di  $C'$ , corrispondente al valore  $v$  del rispettivo parametro, saranno funzioni di  $u, v$  della forma:

$$(1) \quad x' = x + l\alpha + m\xi, \quad y' = y + l\beta + m\eta, \quad z' = z + l\gamma + m\zeta.$$

Qui  $l, m$  indicano due funzioni di  $u, v$ , che restano sempre le stesse comunque la curva  $\Gamma$  si deformi, e per calcolarne i valori basta dare a  $\Gamma$  la forma stessa della conica  $C$ . Queste formole (1) danno la superficie modanata  $\Sigma$  luogo della conica  $C'$ .

Per una posizione qualunque di  $C'$  consideriamo la quadrica  $Q$  che tocca  $\Sigma$  lungo  $C'$  e indichiamo con  $X, Y, Z$  i coseni di direzione della generatrice considerata di  $Q$  uscente dal punto  $(u, v)$  di  $\Sigma$ . Avremo:

$$(2) \quad X = L\alpha + M\xi + P\lambda, \quad Y = L\beta + M\eta + P\mu, \quad Z = L\gamma + M\zeta + P\nu,$$

dove le funzioni  $L, M, P$  di  $u, v$  sono, come le  $l, m$  nelle (1), indipendenti dalla forma di  $\Gamma$ .



Si ottengono le equazioni differenziali per le curve trasformate  $\Gamma'$  sopra  $\Sigma$  esprimendo che in ogni loro punto la tangente ha i coseni di direzione  $X, Y, Z$ .

3. Sia dapprima  $C$  una parabola, che immaginiamo nel piano  $xz$  e di cui scriviamo l'equazione

$$(3) \quad x^2 = 2pz \quad (p > 0).$$

L'equazione di un qualunque paraboloide iperbolico  $Q$ , avente  $C$  per parabola focale, sarà

$$(4) \quad \frac{x^2}{p-k} - \frac{y^2}{k} = 2z - k$$

$$0 < k < p.$$

Assumiamo a parametro  $u$  quello definito dalle formole

$$(5) \quad x = \sqrt{p}u \quad y = 0 \quad z = \frac{u^2}{2}.$$

Sulla parabola confocale  $C'$

$$\frac{x'^2}{p-k} = 2z' - k,$$

prendiamo similmente il parametro  $v$  secondo le formole

$$x' = \sqrt{p-k}v, \quad y' = 0, \quad z' = \frac{v^2 + k}{2}.$$

Il raggio  $\rho$  di 1<sup>a</sup> curvatura di  $\Gamma$  (o di  $C$ ) è dato da

$$(6) \quad \rho = \frac{(u^2 + p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},$$

e definiremo intrinsecamente la curva  $\Gamma$  dando altresì il suo raggio  $T$  di torsione in funzione di  $u$ :

$$T = \varphi(u).$$

Pei valori delle funzioni  $l, m$ ;  $L, M, P$  nelle formole (1), (2) si trovano i seguenti:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{\sqrt{p}(v\sqrt{p-k} - u\sqrt{p}) + \frac{u}{2}(v^2 - u^2 + k)}{\sqrt{u^2 + p}} \\ m = \frac{\frac{\sqrt{p}}{2}(u^2 + v^2 + k) - uv\sqrt{p-k}}{\sqrt{u^2 + p}} \end{array} \right.$$

$$(8) \quad L = \frac{uv + \sqrt{p(p-k)}}{\sqrt{u^2 + p}\sqrt{v^2 + p}}, \quad M = \frac{v\sqrt{p} - u\sqrt{p-k}}{\sqrt{u^2 + p}\sqrt{v^2 + p}}, \quad P = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{v^2 + p}}.$$

Per l'equazione differenziale delle curve trasformate  $\Gamma'$  si ha

$$(9) \quad \frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{p}(u^2 + v^2 + k) + 2uv\sqrt{p-k}}{2T\sqrt{k}};$$

essa è, come si vede, un'equazione del tipo di Riccati per la funzione incognita  $v$  di  $u$ . I raggi di prima e seconda curvatura di  $\Gamma'$  si trovano dati dalle formole

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho' = \frac{(v^2 + p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} \\ T' = \frac{\left[ \frac{\sqrt{p}}{2}(u^2 + v^2 + k) - uv\sqrt{p-k} \right]^2}{kT} \end{array} \right.$$

La prima di queste dimostra che la curva  $\Gamma'$  è una parabola distorta applicabile sopra  $\Gamma$ .

4. La conica fondamentale C sia la ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b)$$

e l'ellisse confocale C'

$$\frac{x'^2}{a^2 - k} + \frac{y'^2}{b^2 - k} = 1$$

$$0 < k < b^2,$$

e per quadrica Q prendiamo l'iperboloide ad una falda

$$\frac{x'^2}{a^2 - k} + \frac{y'^2}{b^2 - k} - \frac{z'^2}{k} = 1,$$

avente C' per ellisse di gola, C per ellisse focale.

Introduciamo qui i parametri  $u, v$  (angoli eccentrici) colle formole

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos u \quad y = b \sin u \\ x' = \sqrt{a^2 - k} \cos v, \quad y' = \sqrt{b^2 - k} \sin v; \end{array} \right.$$

troviamo allora

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{(a^2 - b^2) \sin u \cos u - a \sqrt{a^2 - k} \sin u \cos v + b \sqrt{b^2 - k} \cos u \sin v}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \\ m = \frac{ab - a \sqrt{b^2 - k} \sin u \sin v - b \sqrt{a^2 - k} \cos u \cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \end{array} \right.$$



$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{a\sqrt{a^2 - k} \sin u \sin v + b\sqrt{b^2 - k} \cos u \cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \\ M = \frac{b\sqrt{a^2 - k} \cos u \sin v - a\sqrt{b^2 - k} \sin u \cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \\ P = -\frac{1/\bar{k}}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}. \end{array} \right.$$

Per l'equazione differenziale delle ellissi distorte trasformate  $\mathbf{I}'$  si trova

$$(13) \quad \frac{dv}{du} = \frac{ab - a\sqrt{b^2 - k} \sin u \sin v - b\sqrt{a^2 - k} \cos u \cos v}{T\sqrt{k}},$$

e questa, assumendo come funzione incognita  $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ , ha ancora la forma di Riccati.

5. La conica fondamentale  $\bar{C}$  sia un'iperbola di cui scriviamo l'equazione

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} - \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2} = 1,$$

e consideriamo l'iperboloide rigato  $Q$  avente  $\bar{C}$  per iperbola focale

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2 + \bar{k}} - \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2 - \bar{k}} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{k}} = 1$$

$$0 < \bar{k} < \bar{b}^2,$$

e per iperbola principale  $\bar{C}'$

$$\frac{\bar{x}'^2}{\bar{a}^2 + \bar{k}} - \frac{\bar{y}'^2}{\bar{b}^2 - \bar{k}} = 1.$$

Introduciamo i parametri  $\bar{u} \bar{v}$  sulle iperbole confocali  $\bar{C}, \bar{C}'$  colle formole

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \bar{a} \cosh u \quad \bar{y} = \bar{b} \sinh \bar{u} \\ \bar{x}' = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}} \cosh v, \quad \bar{y}' = \sqrt{\bar{b}^2 - \bar{k}} \sinh v. \end{array} \right.$$

Troviamo allora

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{l} = \frac{\bar{a}\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}} \sinh \bar{u} \cosh \bar{v} + \bar{b}\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{k}} \cosh \bar{u} \sinh \bar{v} - (\bar{a}^2 + \bar{b}^2) \sinh \bar{u} \cosh \bar{u}}{\sqrt{\bar{a}^2 \sinh^2 \bar{u} + \bar{b}^2 \cosh^2 \bar{u}}} \\ \bar{m} = \frac{\bar{b}\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}} \cosh \bar{u} \cosh \bar{v} - \bar{a}\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{k}} \sinh \bar{u} \sinh \bar{v} - \bar{a}\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}^2 \sinh^2 \bar{u} + \bar{b}^2 \cosh^2 \bar{u}}} \end{array} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{L} = \frac{a\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}} \sinh \bar{u} \sinh \bar{v} + \bar{b}\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{k}} \cosh \bar{u} \cosh \bar{v}}{\sqrt{\bar{a}^2 \sinh^2 \bar{u} + \bar{b}^2 \cosh^2 \bar{u}} \cdot \sqrt{\bar{a}^2 \sinh^2 \bar{v} + \bar{b}^2 \cosh^2 \bar{v}}} \\ \bar{M} = \frac{\bar{b}\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}} \cosh \bar{u} \sinh \bar{v} - \bar{a}\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{k}} \sinh \bar{u} \cosh \bar{v}}{\sqrt{\bar{a}^2 \sinh^2 \bar{u} + \bar{b}^2 \cosh^2 \bar{u}} \cdot \sqrt{\bar{a}^2 \sinh^2 \bar{v} + \bar{b}^2 \cosh^2 \bar{v}}} \\ \bar{P} = - \frac{\sqrt{\bar{k}}}{\sqrt{\bar{a}^2 \sinh^2 \bar{v} + \bar{b}^2 \cosh^2 \bar{v}}} \end{array} \right.$$

L'equazione differenziale delle iperbole distorte trasformate  $\bar{I}'$  è data da

$$(16) \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}} \cosh \bar{u} \cosh \bar{v} - \bar{a}\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{k}} \sinh \bar{u} \sinh \bar{v} - \bar{a}\bar{b}}{\bar{T}\sqrt{\bar{k}}},$$

e nell'incognita  $\tanh \frac{\bar{v}}{2}$  ha la forma di Riccati.

6. Paragonando le formole dei due numeri precedenti si ottengono relazioni notevoli fra le deformazioni di una ellisse e di un'iperbola, focale l'una dell'altra, che corrispondono perfettamente alle proprietà delle quadriche *coniugate in deformazione*.

Della ellisse

$$C) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si consideri l'iperbola focale di semiassi

$$\bar{a} = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \bar{b} = b,$$

e collocando l'iperbola nel piano stesso della ellisse, se ne scriva l'equazione sotto la forma

$$\bar{C}) \quad \frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} - \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2} = 1.$$

Colla omografia  $\Omega$  data dalle formole

$$(\Omega) \quad x = \frac{a\bar{a}}{\bar{x}}, \quad y = \bar{a}\frac{\bar{y}}{\bar{x}},$$

l'ellisse  $C'$  si cangia nell'iperbola  $\bar{C}$  e la schiera di quadriche omofocali



determinata da  $C$  nella analoga di  $\bar{C}$ . Prendiamo le rispettive coniche confocali

$$C') \quad \frac{x'^2}{a^2 - k} + \frac{y'^2}{b^2 - k} = 1$$

$$\bar{C}') \quad \frac{\bar{x}'^2}{\bar{a}^2 - \bar{k}} - \frac{\bar{y}'^2}{\bar{b}^2 - \bar{k}} = 1$$

ove

$$\bar{k} = \frac{k \bar{a}^2}{a^2 - k};$$

l'omografia  $\Omega$  cangia appunto  $C'$  in  $\bar{C}'$ .

Per i parametri  $(u, \bar{u})$ ,  $(v, \bar{v})$  l'omografia  $\Omega$  si traduce nelle relazioni

$$\begin{cases} \cosh \bar{u} = \frac{1}{\cos u} & , \quad \sinh \bar{u} = \operatorname{tg} u \\ \cosh \bar{v} = \frac{1}{\cos v} & , \quad \sinh \bar{v} = \operatorname{tg} v \end{cases}$$

onde segue

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \frac{\cos u}{\cos v} \frac{dv}{du}.$$

Le due equazioni differenziali corrispondenti (13), (16) si portano a coincidere se si pone

$$\frac{1}{\bar{T}} = \frac{\cos^2 u}{T}.$$

Per tal modo ad ogni ellisse distorta  $\Gamma$  applicabile sulla ellisse  $C$  si fa corrispondere una determinata iperbola distorta  $\bar{\Gamma}$  applicabile sull'iperbola focale  $\bar{C}$ , e le trasformazioni di  $\bar{\Gamma}$  si ottengono da quelle di  $\Gamma$  semplicemente per mezzo della omografia  $\Omega$ .

7. Fra le trasformazioni delle coniche distorte  $\Gamma$  è notevole la trasformazione *singolare* che si ottiene quando la conica confocale  $C'$  degenera nell'asse focale ricoperto due volte, e la quadrica  $Q$  diventa quindi la sviluppabile delle tangenti alla conica focale di  $C$ . Questa trasformazione singolare corrisponde al valore  $k = p$  del parametro nel caso parabolico ed al valore  $k = b^2$  nel caso ellittico ed iperbolico.

Enunciando le proprietà geometriche relative al caso della trasformazione singolare, abbiamo: *Se una conica  $C$  rotola sopra una conica distorta  $\Gamma$  applicabile, seco trascinando la conica focale  $\bar{C}$ , le tangenti di questa generano una congruenza le cui sviluppabili di un sistema hanno per spigoli di regresso le successive posizioni di  $\bar{C}$ , e gli spigoli di regresso  $\Gamma'$  delle sviluppabili dell'altro sistema sono altrettante coniche distorte applicabili, come  $\Gamma$ , sopra  $C$ .*

**Analisi.** — *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera.* Nota del Corrispondente P. PIZZETTI.

1. Sia  $V(x, y, z)$  una funzione finita, a un sol valore, in tutti i punti dello spazio limitato da una sfera di centro  $O$  e raggio  $R$ , la quale ammetta, entro questo stesso spazio, le derivate parziali finite ed integrabili fino alle  $(2n)^{\text{me}}$  incluse. Si indichi con  $\mathcal{A}_{2n}$  il risultato della operazione

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ripetuta  $n$  volte. Vogliamo dimostrare che: *la media dei valori che la  $V$  assume sulla sfera si può esprimere colla formola*

$$(A) \quad M = V_0 + \frac{R^2}{3!} (\mathcal{A}_2 V)_0 + \frac{R^4}{5!} (\mathcal{A}_4 V)_0 + \dots + \\ + \frac{R^{2n-2}}{(2n-1)!} (\mathcal{A}_{2n-2} V)_0 + \frac{R^{2n}}{(2n+1)!} (\mathcal{A}_{2n} V)_n,$$

dove l'indice 0 si riferisce al centro  $O$  della sfera, e con  $(\mathcal{A}_{2n} V)_n$  si intende un valore compreso fra il massimo e il minimo di quelli che  $\mathcal{A}_{2n} V$  assume nello spazio sferico considerato.

2. Per comodità di dimostrazione assumiamo la notazione seguente. Indichiamo con  $I_1. \varphi(R)$  il risultato della operazione

$$(1) \quad \int_0^R \left( r - \frac{r^2}{R} \right) \varphi(r) . dr$$

eseguita sulla funzione  $\varphi(r)$  (supposta integrabile); con  $I_2. \varphi(R)$  il risultato della stessa operazione eseguita sulla  $I_1. \varphi(r)$ ; ossia

$$I_2. \varphi(R) = \int_0^R \left( r - \frac{r^2}{R} \right) I_1. \varphi(r) . dr;$$

e generalmente con  $I_n. \varphi(R)$  il risultato della operazione (1) ripetuta  $n$  volte.

Se la  $\varphi$  si riduce ad una costante  $c$ , si verifica facilmente che:

$$(2) \quad I_1. c = \frac{R^2}{3!} c, \quad I_2. c = \frac{R^4}{5!} c, \quad \dots, \quad I_n. c = \frac{R^{2n}}{(2n+1)!} c.$$



E poichè, nell'intervallo d'integrazione,  $r - \frac{r^2}{R}$  non è mai negativo, si avrà pure

$$(3) \quad I_n \cdot \varphi(R) = \frac{R^{2n}}{(2n+1)!} \varphi_m$$

dove  $\varphi_m$  è un valore della  $\varphi(r)$  nell'intervallo  $(0, R)$ .

Ciò posto, applichiamo alla  $V$ , nello spazio sferico considerato, la formula di Stokes

$$(4) \quad 4\pi V_0 = \int_s \left( V \frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS - \int_\tau \frac{\mathcal{A}_2 V}{r} d\tau,$$

indicando con  $dS$  un elemento superficiale della sfera, con  $d\tau$  un elemento di volume in essa incluso, con  $n$  la normale interna. Intendendo che  $V_0$  si riferisca al centro della sfera, la (4) diverrà

$$V_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_s V dS - \frac{1}{4\pi R} \int_s \frac{\partial V}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\mathcal{A}_2 V}{r} d\tau,$$

od anche, chiamando  $M$  come si è detto sopra, il valor medio della  $V$  alla superficie della sfera ed osservando che

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\partial V}{\partial n} dS &= - \int_\tau \mathcal{A}_2 V \cdot d\tau, \\ M &= V_0 + \frac{1}{4\pi} \int_\tau \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \mathcal{A}_2 V \cdot d\tau. \end{aligned}$$

Indicando con  $d\Omega$  un elemento angolare di spazio ed osservando che  $d\tau$  può esprimersi con  $r^2 \cdot dr \cdot d\Omega$ , questa formola diventa

$$M = V_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^R dr \left( r - \frac{r^2}{R} \right) \int_{4\pi} \mathcal{A}_2 V \cdot d\Omega.$$

Il rapporto  $\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \mathcal{A}_2 V \cdot d\Omega$  esprime, in questa formola, il valor medio del  $\mathcal{A}_2$  sulla sfera di raggio  $r$ . Indicandolo con  $M_2(r)$  e tenuta la precedente notazione, potremo scrivere

$$(5) \quad M = V_0 + I_1 \cdot M_2(R).$$

Applichiamo questa formola alla funzione  $\mathcal{A}_2 V$  e indichiamo con  $M_4(r)$  la media dei valori del  $\mathcal{A}_4 V$  alla superficie della sfera di raggio  $r$ . Avremo

$$M_2(R) = (\mathcal{A}_2 V)_0 + I_1 \cdot M_4(R),$$

e sostituendo in (5) tenuto conto delle (2):

$$(6) \quad M = V_0 + \frac{R^2}{3!} (\mathcal{A}_2 V)_0 + I_2 \cdot M_4(R).$$

E proseguendo

$$(7) \quad M = V_0 + \frac{R^2}{3!} (\mathcal{A}_2 V)_0 + \frac{R^4}{5!} (\mathcal{A}_4 V)_0 + \dots + \\ + \frac{R^{2n-2}}{(2n-1)!} (\mathcal{A}_{2n-2} V)_0 + I_n \cdot M_{2n}(R).$$

Infatti, in forza della (6), la (7) è vera per  $n = 2$ . Se poi osserviamo che, per la (5)

$$M_{2n}(R) = (\mathcal{A}_{2n} V)_0 + I_1 \cdot M_{2n+2}(R),$$

sarà, tenuto conto delle (2)

$$I_n \cdot M_{2n}(R) = \frac{R^{2n}}{(2n+1)!} (\mathcal{A}_{2n} V)_0 + I_{n+1} \cdot M_{2n+2}(R),$$

con che la (7), supposta verificata per un certo valore di  $n$ , resta pure soddisfatta cangiandovi  $n$  in  $n+1$ .

La (3) poi applicata all'ultimo termine della (7) conduce subito alla formola (1) che si voleva dimostrare, giacchè un valore scelto fra quelli che  $M_{2n}(r)$  assume sulle sfere di centro  $O$  e di raggio  $r$  compreso fra  $0$  ed  $R$ , deve necessariamente esser compreso fra il massimo e il minimo di  $\mathcal{A}_{2n} V$  entro lo spazio sferico considerato.

3. Nel caso in cui uno dei  $\mathcal{A}_{2n}$  si annulli in ogni punto, il numero dei termini nel 2° membro della (A) risulta limitato, e la formola stessa comprende, come caso particolare, il noto teorema di Gauss sul valor medio di una funzione armonica alla superficie di una sfera.

Se nessuno dei  $\mathcal{A}_{2n}$  si annulla identicamente, la (A) prolungata indefinitamente dà luogo ad una serie la quale sarà certamente convergente se le derivate di un ordine qualunque si mantengono inferiori a un limite finito  $L$ . Infatti in tal caso

$$|\mathcal{A}_{2n} V| < 3^n \cdot L.$$

Per dedurre dalla (A) come caso particolare lo sviluppo di Maclaurin, basta supporre  $V$  funzione della sola distanza  $r$  da  $O$ , e propriamente porre

$$V = \varphi(t), \quad t = r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Si ha allora, come non è difficile verificare:

$$(\mathcal{A}_{2n} V)_{t=0} = 2^n \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) (2n+1) \varphi^{(n)}(0),$$

sicchè il termine generico della (A) diventa

$$\frac{R^{2n}}{(2n+1)!} (\mathcal{A}_{2n} V)_0 = \frac{2^n \cdot R^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \varphi^{(n)}(0) = \frac{t^n}{n!} \varphi^{(n)}(0).$$

4. Dalla (A) si deduce

$$(8) \quad (\mathcal{A}_2 V)_0 = \lim_{R=0} \frac{6(M - V_0)}{R^2}.$$

Se si assume questa formola come definizione del  $\mathcal{A}_2 V$ , riesce assai facile dimostrare l'equazione di Poisson

$$\mathcal{A}_2 V = -4\pi k$$

per la funzione potenziale di una massa distribuita nello spazio con densità generica  $k$ .

Infatti, si consideri una sfera di raggio  $R$  e un punto  $P$  a distanza  $r$  dal centro. Il notissimo teorema sulla attrazione degli strati sferici omogenei può enunciarsi sotto forma puramente geometrica dicendo che: *la media delle inverse distanze di  $P$  dai punti della sfera è  $\frac{1}{r}$  ovvero  $\frac{1}{R}$ , a seconda che  $P$  è esterno o interno alla sfera.* Quindi la funzione potenziale di una particella materiale  $m$  posta a distanza  $r$  dal centro avrà, pei punti della sfera, il valor medio superficiale  $\frac{m}{r}$  se la particella è esterna,  $\frac{m}{R}$  se è interna alla sfera. Segue da ciò che se una massa attraente è distribuita dentro e fuori la sfera e ne chiamiamo  $V$  la funzione potenziale per un punto qualunque, la differenza fra il valor medio  $M$  della  $V$  alla superficie della sfera, e il valore  $V_0$  al centro, dipenderà unicamente dalla massa interna alla sfera e sarà

$$\begin{aligned} V_0 - M &= \int_{\tau} \frac{k \cdot d\tau}{r} - \frac{1}{R} \int_{\tau} k \cdot d\tau = \int_{\tau} k \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) d\tau = \\ &= \int_{4\pi} d\Omega \int_0^R \left( r - \frac{r^2}{R} \right) k \cdot dr. \end{aligned}$$

Se la densità della massa, nell'interno della sfera, è compresa fra  $k_1$  e  $k_2$ , l'ultimo membro è compreso fra

$$4\pi \frac{R^2}{6} k_1 \quad \text{e} \quad 4\pi \frac{R^2}{6} k_2;$$

quindi

$$4\pi k_1 < \frac{6(V_0 - M)}{R^2} < 4\pi k_2.$$

Se nel punto  $P$  considerato non vi ha variazione discontinua della densità, la (8) dà pertanto immediatamente la equazione di Poisson.



**Matematica.** — *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

**Fisica.** — *Sopra alcune proprietà elettriche del selenio.* Nota del dott. VITTORIO CHIARINI, presentata dal Socio A. RIGHI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Calcolo provvisorio della profondità dell'ipocentro del terremoto Calabro-Siculo del 28 dicembre 1908.* Nota di EMILIO ODDONE, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Il prof. de Kővesligethy ha indicato un metodo nuovo pel calcolo della profondità dell'ipocentro <sup>(1)</sup> che in questa Nota io proverò ad applicare al terremoto disastroso Calabro-Siculo del 28 dicembre 1908.

Ammettendo al solito una diminuzione dell'intensità sismica in ragione del quadrato della distanza dall'ipocentro, il prof. de Kővesligethy scrive che le accelerazioni stanno in ragione inversa delle distanze dal fuoco, vale a dire:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{h}{r}$$

$\Gamma$  è la massima accelerazione del terremoto ad una data stazione,  $\Gamma_0$  quella all'epicentro,  $h$  la profondità incognita dell'ipocentro, ed  $r$  la distanza minima tra quest'ipocentro ed un punto della superficie terrestre.

Per tener in conto la diminuzione dell'energia per via dell'assorbimento del mezzo, adotta la variante:

$$(1) \quad \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{h}{r} e^{-\frac{\alpha}{R}(r-h)}$$

<sup>(1)</sup> R. de Kővesligethy, *Seismischer Stärkegrad und Intensität der Beben.* Beitr. zur Geophys. Bd. VIII, 1907. Anche *Seismonomia*, Cap. X, Modena, Società Tipografica 1906. — Z. de Vagha, *Sur la profondeur du foyer et le coefficient d'absorption du tremblement de terre observé a Joko le 10 Janvier 1906.* Bull. Soc. Sism. ital., vol XII. — Em. Janosy, *Bestimmung der Herdtiefe und des seismischen Absorptionskoeffizienten des Charlestoner Erdbebens.* Boll. Soc. ital., vol. XI.

R indica il raggio terrestre in chilom.,  $\alpha$  è una seconda incognita rappresentante il coefficiente d'assorbimento radiale della Terra, cosicchè  $\frac{\alpha}{R}$  è il coefficiente d'assorbimento per chilometro di terra.

D'altra parte sono state enunciate delle relazioni tra le accelerazioni che il suolo scosso dal terremoto può assumere, ed i gradi delle solite scale d'intensità sismica e ad esempio, per la scala suggerita dal compianto sismologo prof. Cancani (<sup>1</sup>), vale la formola:

$$(2) \quad G - G_0 = 3 \log \frac{r}{R_0}$$

$G_0$  e  $G$  essendo i gradi della scala sismica all'epicentro e ad una stazione qualsiasi.

Dalle due relazioni soprascritte si deduce la terza:

$$(3) \quad \left[ \frac{3\alpha}{R} h \log e + 3 \log h \right] - \left[ 3 \frac{r}{R} \log e \right] \alpha = G - G_0 + 3 \log r$$

che è appositamente messa sotto la forma:

$$(4) \quad x - by = n$$

dove

$$b = 3 \frac{r}{R} \log e, \quad \text{ed} \quad n = G - G_0 + 3 \log r.$$

Oltre la  $G_0$ , grado dell'isosisma epicentrale, avendosi varie successive isosisme del grado  $G_1, G_2, G_3, \dots$  per un dato terremoto otterremo altrettante equazioni del tipo (4), dalle quali col metodo dei minimi quadrati si

(<sup>1</sup>) Riproduciamo la scala sismica del prof. Cancani mettendo a riscontro dei vari suoi gradi le corrispondenti accelerazioni:

Gradi (Cancani)	Accelerazioni	Gradi (Cancani)	Accelerazioni
	mm		mm
I strumentale	< 2,5	VII	100-250
II	2,5-5,0	VIII	250-500
III	5-10	IX	500-1000
IV	10-25	X	1000-2500
V	25-50	XI	2500-5000
VI	50-100	XII (grande catastrofe)	5000-10000

La relazione tra i gradi della scala Cancani e le corrispondenti accelerazioni è dovuta ancora al prof. de Kövesligethy che la trovò conforme alla legge psicofisica del Fechner.

ricaveranno  $x$  ed  $y$ . Nelle due espressioni  $b$  ed  $n$ , entra però la  $r$ , la quale è funzione della profondità incognita, legata a questa quantità dalla

$$r^2 = h^2 + \Delta^2.$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$  sono le distanze epicentrali delle stazioni d'osservazione. Per comodità di calcolo terremo quest'altra relazione:

$$(5) \quad r = \frac{h}{\sin \varepsilon}$$

nella quale  $\varepsilon$  è l'angolo di emergenza e

$$(6) \quad \text{tang } \varepsilon = \frac{h}{\Delta}.$$

In prima approssimazione, invece di  $r$ , introdurremo semplicemente la distanza epicentrale  $\Delta$ . Poi a calcoli fatti, ottenuto un primo  $h$ , dalle relazioni (6) e (5) ricaveremo la  $r$ . Allora ripeteremo i calcoli con questo valore di  $r$ , e magari, se occorrerà lo ripeteremo una terza volta, giungendo così al valore della profondità dell'ipocentro con tutta l'approssimazione che il metodo consente.

Pel terremoto Calabro-Siculo del 28 dicembre, la sezione geodinamica del R. Ufficio Centrale, presieduta dal dott. Martinelli, mi ha favorito uno schizzo provvisorio delle più importanti linee isosisme, ed è sulle medesime che ho stabilito i calcoli, i quali conseguentemente hanno essi pure carattere di provvisorietà.

Quali medie distanze epicentrali delle linee isosisme, si ritennero i raggi dei cerchi aventi la stessa superficie limitata dalle varie linee isosisme. Mediante lavoro di integrografo, si determinarono queste varie superficie  $S$  e se ne ricavarono i corrispondenti raggi  $\Delta$  dei cerchi di egual superficie, valendosi delle relazioni:

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} \quad , \quad \Delta_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} \quad , \quad \dots \quad , \quad .$$

Si trovò così che alle linee isosisme segnate nella colonna di sinistra corrispondevano i raggi segnati nella colonna di destra.

Linee isosisme G.	Raggi in chilom. $\Delta$ .
XII	16,274
IX	27,306
VIII-IX	37,871
VII-VIII	61,886
VII	80,741
VI	85,875



Introdotti questi valori nella (3) ebbi sei equazioni del tipo (4) che raggruppai nelle due uniche:

$$3x - 0,020314 y = 6,17$$

$$3x - 0,056992 y = 1,40$$

dalle quali mi risultò  $x = 2,94$  ed  $y = \alpha = 130$ .

Noto  $x$ , la sua espressione equivalente  $\frac{3\alpha}{R} h \log e + 3 \log h$  mi fornì l'equazione trascendente:

$$h + 112,8 \log h = 110,52.$$

Essa risolsi colle approssimazioni successive, ponendo, invece di  $e^h$ , i primi termini della serie  $1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots$  e sostituendo l' $h$  approssimato in  $\log h$  e ricalcolando.

Ottenni così  $h = 8$  km. ed  $\frac{\alpha}{R} = 0,0204$  per chilom.

Con questo valore di  $h$  approssimato, col sussidio delle (6) e (5) ebbi i diversi valori di  $r$ :

$$r_1 = 18,16 ; r_2 = 28,45 ; r_3 = 38,69 ; r_4 = 62,39 ; r_5 = 81,10 ; r_6 = 86,25 .$$

Rivalendomi delle (3), riottenni stavolta  $\alpha = 138,8$  e

$$h + 105,6 \log h = 109,8,$$

quindi:

$$h = 9 \text{ chilom. ed } \frac{\alpha}{R} = 0,0218 \text{ per chilom.}$$

Reciprocamente mediante questi valori di  $h$  ed  $\frac{\alpha}{R}$  risalendo all'intensità teorica della scossa, ne ebbi per le sei date distanze epicentrali i numeri calcolati nella seconda e quinta colonna della seguente tabellina:

G Osserv.	G Calcol.	Calcol.-Osserv.	G Osserv.	G Calcol.	Calcol.-Osserv.
XII	12	0,0	VII, 5	8	+ 0,5
IX	10	+ 1,0	VII	7,1	+ 0,1
VIII, 5	9,2	+ 0,7	VI	6,8	+ 0,8

Paragonati colle intensità osservate, gli errori residui non sono tanto piccoli, ed è un difetto del calcolo che dessi non abbiano alternativamente segno alternato; tuttavia a motivo della provvisorietà del calcolo riterremo l'accordo sufficiente.

Il terremoto or considerato è, sotto varî aspetti, simile a quelli che funestarono le stesse località addì 5 febbraio 1783 e 16 novembre 1894. Le rispettive linee isosisme, se se ne eccettuano le più epicentrali, corrono in egual modo circa <sup>(1)</sup> talchè se si applicasse il metodo del prof. de Kővesligethy a questi due altri terremoti, si cadrebbe su profondità dell'ipocentro poco diverse da quelle or ora trovate.

Un altro terremoto Calabro-Siculo investigato rispetto la profondità del suo ipocentro, si è quello dell'8 settembre 1905. Il Rudzky <sup>(2)</sup> vi applicava un suo metodo col quale la profondità del fuoco deduceva dalla distanza in arco tra l'epicentro ed il luogo geometrico nel quale la velocità di propagazione apparente scende al suo valor minimo. In mancanza di valori esatti per la velocità di propagazione vera nell'interno della Terra, accettava l'ipotesi di una propagazione rettilinea. Le due ultime formole, quelle che danno la soluzione del problema, sono allora le seguenti:

$$(*) \quad \sin \varepsilon = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma}{\gamma} - \cos \frac{1}{2} \gamma$$

ed

$$(**) \quad h = \frac{2R \sin \frac{1}{2} \gamma \sin \varepsilon}{\cos \left( \frac{\gamma}{2} - \varepsilon \right)}.$$

$\varepsilon$ , l'angolo di emergenza, si ricava dalla (\*) una volta noto  $\gamma$  distanza in arco dall'epicentro al luogo geometrico in cui la velocità apparente ha il valor minimo;  $h$  ed  $R$  hanno i valori di prima. Sostituendo nella (\*\*) le or note espressioni di  $\varepsilon$  ricavò la profondità  $h$ . Valendosi della tabella II del lavoro del prof. Rizzo: *Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8 settembre 1905* (Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino, serie II, t. LVII, pag. 309, 1906), ritenne che la distanza epicentrale del luogo del minimo fosse di 1500 km., donde  $\gamma = 0,075 \pi$  in misura d'arco, e  $\sin \varepsilon = 0,00462$ . Con questi valori gli risultò una profondità dell'ipocentro di circa 7 chilometri.

Lo scopo nostro non è di stabilire confronti. Non possiamo però esimerci dall'accennare che il sismologo Mallet col suo metodo primordiale, tanto criticato, di dedurre l'angolo d'emergenza dalle fratture oblique, arrivò

<sup>(1)</sup> Mi riferisco alla tav. X, della Memoria: *Il terremoto del 16 novembre 1894 in Calabria e Sicilia*. Relazione sismologica del prof. A. Riccò. Roma, Tipogr. Nazionale, 1909.

<sup>(2)</sup> M. P. Rudzky, *Ueber die Tiefe des Herdes des calabrischen Erdbebens von 8 Sept. 1905*. Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie (Cl. des Sc. math. et nat.), n. 1, art. 4, janvier 1907.

alla conclusione che l'ipocentro del grande terremoto napoletano dell'anno 1857 fosse ad una profondità di 5 miglia inglesi e  $\frac{3}{4}$ , cioè 10 chilom., circa la cifra da noi trovata <sup>(1)</sup>!

Da queste cifre si scostano assai le profondità che si ottengono cogli altri noti procedimenti.

Il metodo di Seebach, sebbene esso pure si basi sulla velocità della propagazione rettilinea della scossa, generalmente fornisce profondità molto maggiori, nel caso nostro per esempio non meno di 100 chilom. Il professore Riccò, che ne provò il metodo nella sua monografia sul terremoto del 16 novembre 1894, trovò 159 chil. (loc. cit., pag. 191).

Lo stesso dicasi del metodo del prof. Schmidt. In esso si ammette la velocità variabile colla distanza, e come prima, si ricava la profondità supponendo nota quella circonferenza intorno all'epicentro sulla quale la velocità di propagazione ha un valore minimo. Con questo metodo la profondità ipocentrale del terremoto Calabro-Siculo dell'8 settembre 1905 fu calcolata dal prof. Rizzo tra i 290 ed i 550 chilometri <sup>(2)</sup>. Il prof. Rizzo, al quale sembrò esagerata questa profondità, emise l'ipotesi che la profondità dell'ipocentro sia misurata dall'altezza della calotta sferica limitata dalla circonferenza di velocità minima. Così ridusse la profondità ipocentrale ai 50 chilometri circa.

Finalmente nel metodo del Cap. Dutton <sup>(3)</sup>, in base sempre alla variazione dell'intensità sismica in ragione del quadrato delle distanze, si ricava quale funzione la profondità sia di quella tale distanza epicentrale, ove si fa massima la variazione relativa dell'intensità dello scuotimento. Il prof. Riccò applicando questo metodo (loc. cit., pag. 207) al terremoto del 16 novembre 1894, ottenne valori poco concordanti, variabili tra i 21 ed i 161 chilom. Lo stesso prof. Riccò, nella medesima pubblicazione a pag. 209, ammettendo egli pure la relazione della ragione inversa del quadrato delle distanze, nella supposizione inoltre che i gradi della scala sismica de Rossi-Forel siano veramente proporzionali all'intensità del terremoto, ricavò per la profondità dell'ipocentro, come era da attendersi e come s'attendeva, dei valori molto discordanti. Nella sola direzione che dal-

<sup>(1)</sup> Mallet, *Enciclopedia Britannica*, alla parola Earthquake, 9<sup>a</sup> ed., vol. VII, pag. 611. « After the great Neapolitan earthquake of 1857, Mr. Mallet, aided by the Royal Society, spent some months in carefully examining the country which had been visited by the shock, and in 1862 he published an elaborate report in which his observations were fully discussed.

« By determining the wave-paths at twenty-six stations in every azimuth around the seismic vertical, he was enabled to deduce the important fact that the mean focal depth of the earthquake was about  $5\frac{3}{4}$  geographical miles, [ $5\frac{3}{4} \times 1851,8 = 10^{km},6$ ] ».

<sup>(2)</sup> G. B. Rizzo, *Sopra il calcolo della profondità degli ipocentri nei movimenti sismici*. Atti R. Acc. delle scienze di Torino, vol. XLI, 1905-1906, pag. 1061.

<sup>(3)</sup> United States Geological Survey. Ninth Annual Report, 1887-88.



l'epicentro va verso ESE, lungo la quale le diverse isosisme avevano andamento più uniforme, ottenne delle profondità meno disparate, aggirantesi intorno ad una cinquantina di chilometri. Quando finalmente provò ad esprimere l'intensità osservata, non più coi gradi della scala De Rossi-Forel, ma colle accelerazioni corrispondenti, sebbene adoperasse la relazione:

$$\frac{F}{F_0} = \left(\frac{h}{r}\right)^2, \text{ anzichè la } \frac{F}{F_0} = \frac{h}{r}$$

vide la profondità dell'ipocentro assumere dei valori notevolmente più bassi: dai 21 ai 15 chilom. circa. Tenendo la relazione seconda, la più probabile, perchè se l'intensità obbedisce alla legge di Newton, l'accelerazione invece varia inversamente alla prima potenza della distanza, si avrebbero avute profondità ancora ridotte.

E noi abbiamo visto che i recenti metodi dei professori de Kővesligethy e Rudzky riducono la profondità degli epicentri nei due citati terremoti Calabro-Siculi a 7 e 9 chilometri.

Il focolare sismico si anniderebbe immediatamente sotto, se non nella massa stessa degli scisti cristallini che formano l'ossatura di quelle regioni. Quale però tormentata ossatura! Il coefficiente d'assorbimento, eguale a 0,02 assume ivi un triste primato. Esso ha un valore cinque volte maggiore di quello proprio a tali profondità (0,004), per cui suggerisce l'idea che la crosta terrestre sia colà profondamente disgregata o fratturata.

Chimica. — *Sulla costituzione dei clorosali rameoso-rameici* <sup>(1)</sup>.

Nota di G. POMA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In una Nota precedente <sup>(2)</sup> ho studiato la solubilità del Cu Cl nelle soluzioni cloridriche di Cu Cl<sub>2</sub>, giungendo alla conclusione che realmente tra il cloruro rameoso ed il rameico devono formarsi uno o più sali complessi, la cui costituzione non può essere chiarita dalle sole misure di solubilità.

Allo scopo di determinare possibilmente la formula di tali composti molecolari, od almeno di stabilire la rispettiva funzione acida o basica dei due cloruri di rame, ricorsi a quelle misure elettriche che le particolarità del caso dimostravano più opportune.

Come esperienza preliminare ho voluto determinare le variazioni che si producono nelle conducibilità specifiche di soluzioni cloridriche pure o cloridriche e rameiche quando queste vengono sbattute con Cu Cl.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Parma diretto dal prof. G. Plancher.

<sup>(2)</sup> Rend. Acc. Lincei, 1909.

Ecco i risultati ottenuti:

	Conducibilità specifica
sol. 3 n. HCl	$\chi$ 0.7116
sol. 3 n. HCl + $\times$ Cu Cl	" 0.7212
sol. 3 n. HCl + 0.89 n. Cu Cl <sub>2</sub>	" 0.6163
sol. 3 n. HCl + 0.89 n. Cu Cl <sub>2</sub> + $\times$ 'Cu Cl	" 0.6251

Come si vede, le variazioni trovate sono troppo piccole perchè da esse sia possibile trarre alcuna conseguenza: probabilmente sono dovute soltanto ad impurità contenute nel Cu Cl ed alle variazioni che i volumi dei liquidi dovranno probabilmente subire mentre il cloruro rameoso va in soluzione.

Tali esperienze sembrano dunque dimostrare che il numero totale degli ioni contenuti nelle soluzioni studiate non varia sensibilmente per il formarsi dei sali complessi rameoso-rameici; la questione però che mi interessava maggiormente di studiare era quella riguardante la loro costituzione.

A questo scopo ricorsi a due specie di esperienze che mi diedero risultati concordanti.

La prima di esse fu di natura elettrometrica.

È noto che immergendo una lamina di platino platinato in una soluzione cloridrica contenente Cu Cl e Cu Cl<sub>2</sub> si ottiene un così detto elettrodo rameico-rameoso che deve possedere un determinato potenziale di riduzione e rispettivamente di ossidazione, dal quale è possibile calcolare il rapporto tra la pressione osmotica, e quindi anche la concentrazione, degli ioni rameici e quella degli ioni rameosi.

Al processo di riduzione e rispettivamente di ossidazione indicato dalla equazione



corrisponde la singola differenza di potenziale espressa dalla formula:

$$\varepsilon = \text{RT} \ln. K \frac{[\text{Cu}^{\cdot\cdot}]}{[\text{Cu}^{\cdot}]}$$

da cui può ricavarsi il termine  $\text{RT} \ln. K$ , detto come è noto il potenziale elettrolitico dell'elettrodo, quando si determini il potenziale  $\varepsilon$ , essendo fra loro eguali le pressioni osmotiche degli ioni rameosi e degli ioni rameici. In tale caso sarà evidentemente

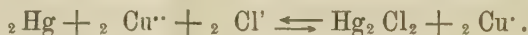
$$\text{RT} \ln. \frac{[\text{Cu}^{\cdot\cdot}]}{[\text{Cu}^{\cdot}]} = 0$$

per cui  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{RT} \ln. K$ .

Per eseguire queste misure ho collegato l'elettrodo rameico-rameoso con un elettrodo normale a calomelano, ottenendo la pila:



Il processo chimico il quale accompagna lo stabilirsi, a circuito chiuso, di una F. E. M. nell'elemento mentovato è il seguente:



Evidentemente il caso in cui la F. E. M. sia uguale a zero è affatto particolare.

Ho eseguito queste misure di F. E. M. impiegando il comune metodo di compensazione di Poggendorff, confrontando l'elemento con una pila campione di Weston.

La temperatura alla quale eseguiro queste esperienze era di 25°.

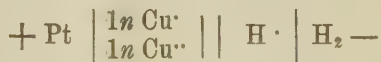
Il calcolo per ricavare il valore di  $\frac{[\text{Cu}^{..}]}{[\text{Cu}']}$  è il seguente:

$$\varepsilon = 0.059 \log. \frac{[\text{Cu}^{..}]}{[\text{Cu}']} + a \quad \text{per } t = 25^\circ$$

in cui  $a$  rappresenta la F. E. M. della pila:



Bodländer e Storbeck <sup>(1)</sup> trovarono che la F. E. M. della pila



è uguale a volta + 0.283 si può dunque concludere che  $a = -0.079$ . Da ciò consegue che:

$$\frac{[\text{Cu}^{..}]}{[\text{Cu}']} = 10^{\frac{\varepsilon + 0.079}{0.059}}$$

(<sup>1</sup>) Ztschr. anorg. Chem. 31 S. 1 und S. 458 [1902].



I valori trovati per questo rapporto nei liquidi, per i quali ho già dato l'analisi, sono i seguenti:

$n \text{ HCl}$		$t = 25^\circ$		
$\varepsilon = a + 0.059 \log \frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$ volta	$[\text{Cu}^+]$	$[\text{Cu}^{++}]$	$\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$	$\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$
0.1489	0.1016	0.1001	0.995	7145
0.1673	0.1254	0.2002	1.594	14930
0.1841	0.1449	0.3003	2.071	28120
0.1920	0.1703	0.4004	2.350	30840
0.2033	0.1919	0.5005	2.600	60960

È necessario qui di ricordare che nel recipiente in cui vennero rinchiusi le soluzioni rameoso-rameiche, venne con ogni cura scacciata l'aria, con una corrente di azoto purissimo. Le misure quindi vennero eseguite, per quanto si riferisce all'elettrodo rameico-rameoso, in una atmosfera di azoto.

I valori trovati per  $\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$  nelle soluzioni rameoso-rameiche contenenti due grammimolecole di HCl per litro sono:

$2n \text{ HCl}$		$t = 25^\circ$		
$\varepsilon = a + 0.0590 \log \frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$ volta	$[\text{Cu}^+]$	$[\text{Cu}^{++}]$	$\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$	$\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$
0.1770	0.2886	0.1880	0.654	16560
0.1821	0.3035	0.2350	0.775	20180
0.1895	0.3218	0.2820	0.873	27000

Il liquido di collegamento degli elettrodi fu una soluzione di KCl, in questo caso si dovrebbe a rigore tener conto della differenza di potenziale che si stabilisce per diffusione al contatto tra il liquido dell'elettrodo rameoso-rameico, acido per HCl, e la soluzione di KCl; tale differenza di potenziale deve rendere più negativo il detto elettrodo, sicchè la F. E. M. della pila è più piccola di quanto non sarebbe se essa fosse unicamente funzione delle pressioni osmotiche degli ioni  $\text{Cu}^{++}$  e  $\text{Cu}^+$ . L'errore che commetto trascurando questa differenza di potenziale ha per effetto di farmi ottenere per il rapporto  $\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^+]}$  valori minori di quelli che in realtà dovrei avere.

Da ciò apparirà evidente che le conclusioni che io trarrò con risultati così ottenuti sarebbero vere a maggior ragione qualora si fossero avuti i valori corrispondenti ai veri rapporti rameoso-rameici.

Per ultimo ho ripetuto le esperienze di questa natura per le soluzioni rameoso-rameiche quattro volte normali rispetto all'acido cloridrico:

4*n* HCl

$\varepsilon = a + 0,590 \log \frac{[\text{Cu}^{+}]}{[\text{Cu}^{++}]}$ volta	$[\text{Cu}^{+}]$	$[\text{Cu}^{++}]$	$\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^{+}]}$	$\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^{+}]}$
0.1622	0.7884	0.0473	0.060	9290
0.1927	0.8476	0.1894	0.223	30620
0.2015	0.8673	0.2367	0.275	43060
0.2462	0.9646	0.4734	0.495	246600

I numeri che esprimono il rapporto  $\frac{[\text{Cu}^{++}]}{[\text{Cu}^{+}]}$  crescono tutti rapidamente col crescere delle concentrazioni di  $\text{CuCl}_2$ , le loro grandezze dimostrano che le concentrazioni degli ioni rameici sono enormemente maggiori, fino 246600 volte, delle concentrazioni degli ioni rameosi, mentre i rapporti tra le quantità del rame rameico e quelle del rame rameoso totale, oscillano tra un minimo di 0.06 ed un massimo di 2.60. Ciò prova in modo evidente che il rame rameoso si trova incluso in un ione complesso e che molto probabilmente il rame rameico esiste nelle soluzioni come ione libero.

Per decidere se veramente il clorosale in questione aveva il catione ovvero l'anione complesso, le misure elettrometriche rendono molto verosimile quest'ultima possibilità, e per vedere se realmente il catione di esso è costituito dal semplice ione rameico, approfittando del fatto che gli ioni del clorosale devono essere diversamente colorati, ho determinato il senso in cui essi emigrano in seno alle loro soluzioni, durante il passaggio della corrente elettrica <sup>(1)</sup>.

A questo scopo ho riempito per circa un terzo un tubo ad U, lungo 24 cm. con una soluzione 4*n*. HCl, 0.47*n*.  $\text{CuCl}_2$  e 0.96*n*.  $\text{CuCl}$ , che era colorata intensamente in bruno e che aveva una consistenza quasi sciropposa; ho finito di riempire le due branche del tubo ad U con una soluzione 4*n*. di HCl, avendo cura che le due superficie di separazione tra la soluzione bruna inferiore e la incolore superiore fossero ben nitide; due bastoncini di carbone di storta che pescavano per circa un centimetro nella soluzione cloridrica superiore, servivano da elettrodi. Eseguì l'elettrolisi con una corrente di 12

<sup>(1)</sup> W. Nernst, Ztschr. Elektrochem. 3, 309, und Dittrich, Ztschr. phys. Chem. 29, 481.

volta e di 0.2 ampère, prolungandola per circa quattro ore. Il risultato fu il seguente: Nella branca del tubo ad U in cui superiormente si svolgeva idrogeno, polo negativo, la superficie di separazione tra la soluzione inferiore bruna e la superiore incolore era scomparsa, al suo posto cominciava uno strato colorato intensamente in verde che aveva circa cinque millimetri di altezza; nella medesima posizione, ma dall'altra branca del tubo, in quella in cui si svolgeva superiormente il cloro, polo positivo, la colorazione bruna della soluzione inferiore, si era diffusa nella zona prima incolore, occupata dalla soluzione cloridrica.

Questo risultato dimostra che il catione del clorosale è costituito dal semplice ione rameico e che invece l'anione colorato in bruno, contiene il rame rameoso. Se poi si pensa che le soluzioni contenenti gli ioni  $\text{CuCl}_2'$  ovvero  $\text{CuCl}_3''$  già noti, sono perfettamente incolore, è da ritenere molto probabile che nell'anione complesso del clorosale rameoso-rameico, intensamente colorato in bruno, oltre a  $\text{Cu}^+$  sia anche contenuto il  $\text{Cu}^{II}$ .

Io mi riprometto di continuare, specialmente con ricerche di natura ottica. lo studio delle soluzioni cloridriche di questi clorosali rameoso-rameici ed intendo estenderle anche alle loro soluzioni acquose, metiliche ed etiliche; ciò probabilmente mi permetterà di stabilire se nei vari solventi impiegati ed alle diverse diluizioni e temperature alle quali è opportuno di operare, possa formarsi soltanto un unico sale complesso, ovvero se ne possano esistere diversi a seconda delle condizioni fisiche alle quali il sistema può essere sottoposto. Nel medesimo tempo tali nuove ricerche potranno condurre alla conoscenza della costituzione dei clorosali rameoso-rameici dei quali mi sono occupato sin qui.

Credo mio dovere di attestare pubblicamente la mia riconoscenza al prof. R. Abegg ed al prof. G. Plancher, per i consigli e per gli aiuti che cortesemente vollero concedermi.

**Geologia.** — *Gli scisti bituminosi di Besano in Lombardia.*  
Nota del dott. EMILIO REPOSSI <sup>(1)</sup>, presentata dal Corrispondente E. ARTINI.

Negli ultimi due anni vennero ripresi i lavori, già tante volte iniziati ed interrotti, della formazione scisto-bituminosa di Besano in Lombardia.

I lavori attuali non vennero condotti nelle località degli antichi, ma sul prolungamento della formazione in territorio svizzero e precisamente nei dintorni di Meride (Canton Ticino). Come infatti è noto, la zona d'affiora-

<sup>(1)</sup> Il presente lavoro fu eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Civico Museo di Storia Naturale, in Milano. La Memoria definitiva sarà pubblicata negli Atti della Società Italiana di Scienze Naturali.



mento degli scisti di Besano forma un arco, che, da questa classica località, si spinge verso nord-est al monte S. Giorgio in territorio svizzero, per poi ripiegare a sud-est, verso la val di Mendrisio.

Se la formazione di Besano fu assai studiata e venne anche lavorata per la ricerca dei fossili nel territorio italiano, molto meno noti sono i suoi particolari nel resto dell'affioramento, che posso dire fin d'ora non essere nè meno interessante nè meno esteso; ed avendo io stesso eseguito il rilievo che preluse all'attuale periodo di lavori, come pure avendo accompagnato diligentemente questi lavori stessi nel loro svolgimento, potei raccogliere alcune osservazioni, che non mi paiono nel tutto trascurabili per la conoscenza, già del resto abbastanza completa, della formazione di Besano.

È noto che molta incertezza durò sul riferimento cronologico di questa formazione, prima dei lavori del Bassani <sup>(1)</sup> e del Sordelli <sup>(2)</sup> sulla fauna e sulla flora interessantissime in essa conservate. Attualmente si ritengono quasi senza dubbio gli scisti di Besano come press'a poco equivalenti al *S. Cassiano*, e cioè come appartenenti, secondo alcuni, alla parte più recente del trias medio, secondo altri, alla parte più antica del trias superiore.

Dal canto mio, lasciando impregiudicata la questione alla quale qui si accenna, faccio notare come la formazione di Besano, a Besano ed ancor più a Meride, sia enormemente potente e formi un tutto unico, che si sfuma superiormente con le marne puddingoidi varicolori del *raibliano* tipico, mentre si distingue con grande nettezza dalla *dolomia inferiore*, sulla quale si appoggia. In essa i fossili, che hanno servito per la sua determinazione, si trovano esclusivamente negli strati inferiori, anzi si può quasi dire negli strati infimi, che sono anche i soli veramente ricchissimi di bitume, mentre gli altri, sterili di fossili, sono di rado più che mediocrementemente bituminosi.

Questo fatto, che credo di poter affermare incontestabilmente, m'induce a credere che, anche se gli strati infimi della formazione di Besano sono veramente da attribuirsi al trias medio, difficilmente si possa includere in questo periodo tutta l'enorme pila di strati che soprastanno, potente talvolta poco men di un migliaio di metri, fino al *raibliano* tipico. L'idea del Taramelli, che cioè gli scisti di Besano siano rispondenti degli strati a pesci di Raibl, mi pare adunque, per questa e per altre ragioni, la più accettabile.

Durante il rilievo, e specie durante il lavoro industriale, che comprende attualmente quattro gallerie in direzione nella località di Tre Fontane presso Meride, mi fu dato raccogliere una ricchissima messe di fossili (molluschi, pesci, rettili), i quali dimostrano come la classica formazione fossilifera di Besano si continui con gli identici caratteri paleontologici straordinariamente

<sup>(1)</sup> F. Bassani, *Sui fossili e sull'età degli schisti bituminosi triasici di Besano in Lombardia* (Atti Soc. Ital. di Scienze Nat., vol. XXIX, Milano, 1886).

<sup>(2)</sup> F. Sordelli, *Sulle piante fossili recentemente scoperte a Besano, circondario di Varese* (Atti Soc. Ital. di Scienze Nat., vol. XXII, Milano, 1879).

favorevoli anche fuori delle già note e sfruttate località. Potei inoltre raccogliere e precisare alcuni caratteri particolari di giacitura, che mi parvero singolarmente interessanti in riguardo all'origine del bitume, che impregna gli scisti di Besano e che li rende ora tanto ricercati.

La formazione comincia distinguendosi in modo assai netto dalla dolomia inferiore. Gli ultimi banconi di questa hanno già alcune intercalazioni di straterelli marnosi, ricchissimi di bitume, al di sopra di essi poi si nota un'alternanza di strati bituminosi (circa venti) simili a questi, ma più potenti (8-10 cm.), e di strati calcarei, pochissimo magnesiaci, molto regolari. Siffatta alternanza, che rappresenta la formazione utile, ha lo spessore di 5 o 6 metri, ed a poco a poco è sostituita da una serie di straterelli sottili, calcarei, assai più poveri di bitume, che fanno poi passaggio a strati calcarei più grossi e regolari, i quali, con frequenti intercalazioni di straterelli marnosi, si accompagnano sino alle marne varicolori tipiche.

I fossili si trovano in abbondanza solo negli strati della formazione utile; più scarsi sono nei 10-20 metri soprastanti, poi scompaiono affatto. Ma quello, ch'è a parer mio più notevole, è la distribuzione dei fossili negli strati utili: i pesci ed i rettili si trovano unicamente, ed in abbondanza veramente straordinaria, negli straterelli scisto-marnosi ricchissimi di bitume, mentre i molluschi (bivalvi ed ammoniti) si raccolgono solo negli strati calcarei ad essi intercalati, che ne sono non di rado letteralmente zeppi.

L'impressione che se ne riceve è, che in quell'antico mare triasico, inegualmente profondo e vario, le condizioni di vita ritmicamente e quasi d'improvviso si cambiassero, producendo a volta a volta la morte di sterminate quantità di pesci e di rettili, i quali abbandonavano sul fondo le loro spoglie pressochè intatte. Terminata la strage, che faceva riposare vicini i cadaveri dei pesci e dei loro predatori, gli ictiosauri, le condizioni si rifacevano normali e sul fondo di quel mare tornavano ad accumularsi i sedimenti consueti, ricchi di conchiglie.

Ed invero, se vi è caso in cui i fatti osservati si trovano d'accordo con le ipotesi, che attualmente si fanno per spiegare l'origine degli idrocarburi naturali, è certamente questo.

È noto che la maggioranza dei geologi, seguendo principalmente le idee dell'Engler <sup>(1)</sup> e de'suoi continuatori, suppone, che i petroli derivino dal disfacimento di cumuli enormi di animali marini, uccisi da particolari condizioni d'ambiente e sepolti in seno al mare, dove, sottratti alla distruzione degli animali predatori da quelle stesse condizioni d'ambiente, subirono uno speciale processo di putrefazione. Condizioni simili si verificherebbero anche adesso ad es. sul fondo del mar Nero, dove i pesci, giunti ad una certa profondità, muoiono fulminati da quantità forti di idrogeno solforato, che vi si sviluppano per la putrefazione di altri animali.

(<sup>1</sup>) Vedi Bericht. d. deutsch. chem. Gesellschaft, Bd. 33, 7.



Ora, quanto dissi prima sugli scisti di Besano ben s'accorda, secondo me, con questo supposto.

Infatti i pesci e la sostanza bituminosa vi sono sempre concomitanti: dove sono pesci in abbondanza, è anche il bitume, e con una percentuale media superiore al 35 %; e dove questo scarseggia, mancano anche i pesci, e tutto accenna a condizioni più normali di deposito.

D'altra parte tutto porta a credere, che la sostanza bituminosa degli strati ricchi di Besano si sia formata in essi, e non abbia migrato da strato a strato per concentrarsi in quelli in cui ora si trova, provenendo chi sa da dove. Difatti, quando ciò non fosse, tornerebbe inspiegabile la concomitanza or ora accennata dei pesci e del bitume, e sarebbe del pari difficile comprendere, come gli infimi straterelli bituminosi, intercalati alla dolomia inferiore, che avrebbero dovuto impoverirsi per i primi, possano essere altrettanto ricchi quanto i superiori. Questo fatto ci dà anzi, almeno secondo il mio parere, ragione di una notevole differenza di composizione, che intercede tra la sostanza bituminosa cavata dagli scisti di Besano e gli idrocarburi naturali più comuni, differenza che a tutta prima sembrerebbe contrastare alquanto alla supposta loro somiglianza d'origine.

Se si sottopongono gli scisti di Besano a distillazione secca (ciò che si fa in posto, per scopo industriale), con una quantità di prodotti secondari (idrocarburi gassosi, acque ammoniacali, idrogeno solforato, ecc.), se ne ottiene un olio denso, nero, d'odore particolare sgradevole, contenente circa il 5 % di solfo, e da 6,4 a 6,7 % d'azoto <sup>(1)</sup>. Queste percentuali, per siffatti componenti, sono inconsuete nella generalità dei bitumi e dei petroli, e potrebbero far pensare a particolari condizioni nei processi d'alterazione della sostanza organica, che hanno dato origine ai bitumi di Besano. Ma, quantunque questo fatto non si possa escludere a priori, nonostante la difficoltà che s'avrebbe poi a chiarirlo, parmi sufficiente supporre che la diversità di composizione fra il bitume di Besano ed i comuni idrocarburi dipenda dall'essere quello rimasto in posto e dall'aver questi subito una naturale distillazione, che li fece migrare da strato a strato per concentrarli nelle zone d'anticlinale e nelle formazioni da cui ora si cavano, impoverendoli nel tempo istesso di alcuni tipici componenti originari.

Comunque sia, prima di terminare questi cenni preliminari, voglio far notare ancora, come gli scisti bituminosi di Besano abbiano una composizione relativamente tanto eccezionale, che di rado se ne incontrano di simili nella serie degli strati. Confrontandoli con quelli più noti industrialmente sfruttati, si trovano infatti solo gli scisti retici di Seefeld nel Tirolo che si avvicinino ad essi. Si può anzi dire che gli scisti di Besano e quelli di

<sup>(1)</sup> I dati qui riferiti mi furono comunicati dai dottori Contardi e Malerba, che stanno studiando chimicamente i prodotti di distillazione degli scisti di Besano ed i loro derivati.



Seefeld siano per composizione affatto identici, e che gli uni e gli altri si distinguano nettamente da tutti quelli di cui si ha conoscenza.

Gli scisti di Seefeld, notissimi per la loro ricchezza in bitume ed in pesci fossili, dal 1883 sono utilizzati per la preparazione del prodotto farmaceutico, di composizione chimica ancora imprecisata, conosciuto col nome di « ittiolo ».

L'attuale periodo di lavori della formazione di Besano, che ha dato occasione al presente studio, fu condotto allo stesso scopo, e portò alla preparazione di composti analoghi, se non identici, a quello ricavato dagli scisti di Seefeld e già tanto noto nella pratica medica.

## CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA annuncia di aver ricevuto dal Presidente dell'Istituto di Francia la seguente nobilissima lettera:

INSTITUT DE FRANCE

Paris le 6 février 1909.

Le Président de l'Institut à M. le Président de l'Académie des Lincei.

*« Monsieur le Président,*

L'Institut de France ne s'est pas contenté de vous exprimer toute la part qu'il prenait avec la France entière au deuil de l'Italie. Il a voulu aussi contribuer aux secours que réclamaient les survivants du terrible ravage et leur marquer sa vive sympathie. Une souscription a été ouverte parmi ses membres et j'ai l'honneur de vous en envoyer ci-joint le montant en un chèque payable à Rome, soit la somme de trois mille francs.

L'Institut de France devait naturellement avoir recours à l'entremise de l'illustre Académie que vous présidez, avec laquelle il entretient depuis si longtemps les rapports de la plus douce confraternité.

Veuillez agréer, Monsieur le Président, les assurances de ma très haute et confraternelle estime.

*Le Président de l'Institut*  
BOUCHARD

A questa comunicazione, che tanto onora le due grandi Accademie e che dimostra nuovamente la intimità dei loro rapporti scientifici, il PRESIDENTE rispose col seguente telegramma:

*« Mr. BOUCHARD, Président de l'Institut de France — Paris.*

Profondément touché de la nouvelle épreuve d'amitié et de bienveillance que l'Institut de France a bien voulu donner à l'Italie et à l'Académie des Lincei, je m'empresse à

vous envoyer l'expression la plus chaleureuse de notre reconnaissance, et je vous prie d'exprimer ces sentiments à tous les illustres Confrères. J'aurai l'honneur d'en informer notre Académie dans sa prochaine séance.

*Le Président de l'Académie des Lincei*

BLASERNA

E. M.